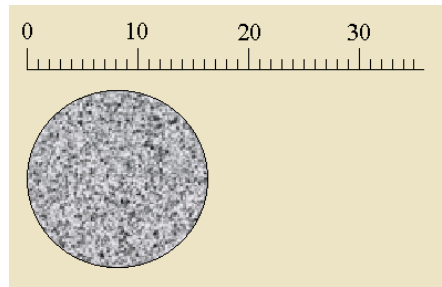


Introducción al estudio de las mediciones

1.0 Medición

Una medición es el resultado de una operación humana de observación mediante la cual se compara una magnitud con un patrón de referencia.

Por ejemplo, al medir el diámetro de una varilla, se compara el diámetro de la varilla con una regla graduada y se lee en la escala. Por otro lado, al medir la velocidad de un corredor, se compara el tiempo que tarda en recorrer una determinada distancia con el intervalo de tiempo registrado por un cronómetro, y después se calcula el cociente de la distancia recorrida entre el valor leído en el cronómetro.



Cuando alguien mide algo, debe tener cuidado para no producir una perturbación en el sistema que está bajo observación. Por ejemplo, cuando se mide la temperatura de un cuerpo, se le pone en contacto con un termómetro. Pero, cuando se les pone en contacto, se intercambia energía en forma de calor entre el cuerpo y el termómetro, dando como resultado un pequeño cambio en la temperatura de ambos. Así, el instrumento de medida afecta de algún modo a la magnitud o variable que se desea medir.

En consecuencia, toda medición es una aproximación al valor real y por lo tanto siempre tendrá asociada una incertidumbre.

1.1 Patrones de medida

La existencia de diversos patrones de medida para una misma magnitud, ha creado dificultades en las relaciones internacionales de comercio, en el intercambio de resultados de investigaciones científicas, etc. La selección y adopción de los patrones para medir las magnitudes físicas es el resultado de una convención, y su definición es hasta cierto punto arbitraria, pero está condicionada a que cumpla los siguientes requisitos:

- que sean reproducibles y

- que sean invariantes.

La primera condición garantiza su utilización universal y la segunda garantiza la universalidad de la magnitud física que se mide.

Dentro de este contexto los científicos de diversos países intentaron establecer unidades comunes de validez universal. Durante el siglo XIX se creó el Sistema Métrico Decimal que, según sus autores, debería servir "en todos los tiempos, para todos los pueblos, para todos los países" y una de su aportación importante fue la introducción de los múltiplos y submúltiplos de los patrones en base diez. Este sistema comenzó a difundirse ampliamente, fue legalizado en todos los países y constituye la base de las unidades que sirven para la medición de todas las magnitudes en la física, en otras ciencias y en la ingeniería. Sin embargo, en algunos países aun se utilizan otros sistemas de medida, como es el caso del sistema inglés.

1.2 Sistema Internacional

Actualmente se reconoce al Sistema Internacional (SI) de Unidades como un sistema universal y su aplicación se está extendiendo gradualmente a todos los países y campos de la ciencia y la ingeniería. En el SI se reconocen siete unidades básicas:

Unidad de **tiempo** El **segundo** (s) es la duración de 9 192 631 770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.

Unidad de **longitud** El **metro** (m) es la longitud del trayecto recorrido en el vacío por la luz durante un tiempo de $1/299\,792\,458$ de segundo.

Unidad de **masa** El **kilogramo** (kg) es igual a la masa del prototipo internacional del kilogramo

Unidad de **intensidad de corriente eléctrica** El **ampere** (A) es la intensidad de una corriente constante que manteniéndose en dos conductores paralelos, rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y situados a una distancia de un metro uno de otro en el vacío, produce una fuerza igual a 2×10^{-7} newton por metro de longitud.

Unidad de **temperatura termodinámica** El **kelvin** (K), unidad de temperatura termodinámica, es la fracción $1/273.16$ de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.

Observación: Además de la temperatura termodinámica (símbolo T) expresada en kelvins, se utiliza también la

temperatura Celsius (símbolo t) definida por la ecuación $t = T - T_0$ donde $T_0 = 273.15$ K por definición

Unidad de **cantidad de sustancia**

El **mol** (mol) es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en 0,012 kilogramos de carbono 12.

Cuando se emplee el mol, deben especificarse las unidades elementales, que pueden ser átomos, moléculas, iones, electrones u otras partículas o grupos especificados de tales partículas.

Unidad de **intensidad luminosa**

La **candela** (cd) es la unidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia 540×10^{12} hertz y cuya intensidad energética en dicha dirección es 1/683 watt por estereorradián.

2.0 Fuentes de Incertidumbre

Todas las mediciones tienen asociada una incertidumbre que puede deberse a los siguientes factores:

- la naturaleza de la magnitud que se mide,
- el instrumento de medición,
- el observador,
- las condiciones externas.

Cada uno de estos factores constituye por separado una fuente de incertidumbre y contribuye en mayor o menor grado a la incertidumbre total de la medida. La tarea de detectar y evaluar las incertidumbres no es simple e implica conocer diversos aspectos de la medición.

En principio, es posible clasificar las fuentes de incertidumbres en dos conjuntos bien diferenciados, las que se deben a :

- **Errores accidentales o aleatorios** que aparecen cuando mediciones repetidas de la misma variable dan valores diferentes, con igual probabilidad de estar por arriba o por debajo del valor real. Cuando la dispersión de las medidas es pequeña se dice que la medida es precisa.
- **Errores sistemáticos** que son una desviación constante de todas las medidas ya sea siempre hacia arriba o siempre hacia abajo del valor real y son producidos, por ejemplo, por la falta de calibración del instrumento de medición.

En la figura 1 se representan los errores sistemáticos y los errores aleatorios. Los centros de los círculos indican la posición del valor que se quiere medir y las cruces indican los valores de varias mediciones. La dispersión de los puntos se asocia a la precisión, mientras que su centro efectivo (centroide) está asociado a la exactitud. El conjunto de medidas representa una medición a) precisa pero inexacta, b) más exacta y con la misma precisión, c) menos precisa y menos exacta, d) más exacta pero menos precisa.

La medida ideal es aquella que tiene un 100% de exactitud y un 100% de precisión.

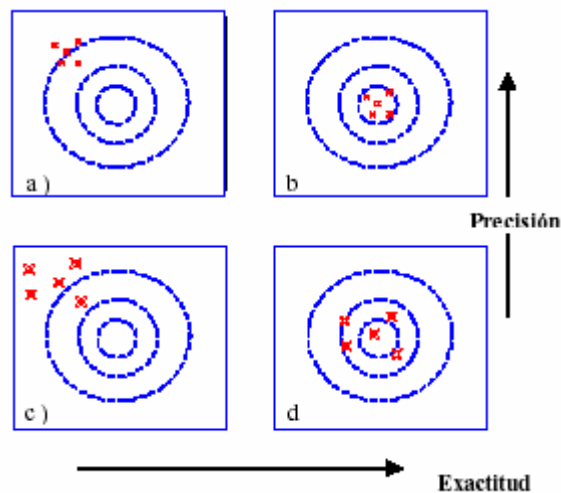


Figura 1. Ilustración esquemática de los conceptos de precisión y exactitud.

2.1 Incertidumbre en medidas reproducibles

Cuando al realizar una serie de medidas de una misma magnitud se obtienen los mismos resultados, no se puede concluir que la incertidumbre sea cero; lo que sucede es que los errores quedan ocultos ya que son menores que la incertidumbre asociada al aparato de medición. En este caso, puede establecerse un criterio simple y útil: cuando las medidas son reproducibles, *se asigna una incertidumbre igual a la mitad de la división más pequeña del instrumento, la cual se conoce como resolución.*

Por ejemplo, al medir con un instrumento graduado en mililitros repetidas veces el volumen de un recipiente se obtiene siempre 48.0 ml, la incertidumbre será 0.5 ml. Lo que significa que la medición está entre 47.5 a 48.5 ml, a éste se le conoce como intervalo de confianza de la medición y su tamaño es el doble de la incertidumbre. Esto generalmente se aplica cuando se trata de aparatos de medición tales como reglas, transportadores, balanzas, probetas, manómetros, termómetros, etc

2.2 Incertidumbre en medidas no-reproducibles

Cuando se hacen repeticiones de una medida y estas resultan diferentes, con valores x_1, x_2, \dots, x_N , surgen las preguntas:

- ¿Cuál es el valor que se reporta?
- ¿Qué incertidumbre se asigna al valor reportado?

La respuesta a estas preguntas se obtiene a partir del estudio estadístico de las mediciones, el cual debe arrojar cuál es la tendencia central de las medidas y su dispersión. Una introducción al tema del tratamiento de datos se presenta a continuación:

2.2.1 Medidas de tendencia central

La medida más común de la tendencia central de una muestra o conjunto de mediciones está dada por el promedio o media aritmética. Sin embargo, algunas veces este valor no basta y es necesario calcular otras variables estadísticas que ayuden a analizar el resultado de una medición. Estas variables estadísticas son la media y la moda .

2.2.1.1 El promedio \bar{x} de una muestra o conjunto de mediciones $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ está dado por

$$\bar{x} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N)}{N} = \frac{\sum x_i}{N}$$

2.2.1.2 La mediana es el valor de la medición que divide la muestra en dos mitades: una mitad son aquellas mediciones menores a la mediana y la otra mitad es el conjunto de mediciones mayores que la mediana. Suponiendo que la muestra está ordenada de menor a mayor, la mediana está dado por:

$$\text{mediana} = x_{\frac{N+1}{2}}$$

cuando la muestra tiene un número impar de elementos.

Si la muestra tiene un número par de mediciones, la mediana está dada por

$$\text{mediana} = \frac{x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1}}{2}$$

2.2.1.3 La moda es la medición que ocurre con mayor frecuencia. En un conjunto de mediciones puede haber más de una moda.

Cuando el conjunto de datos es simétrico, el promedio y la mediana coinciden, sí además, los datos tienen una sola moda, se dice que los datos son unimodales y la mediana, la moda y el promedio tienen el mismo valor. Cuando la mediana no coincide con el promedio, los datos están cargados o sesgados hacia la izquierda o hacia la derecha del promedio.

2.2.2 Medidas de dispersión

La tendencia central no es suficiente para determinar el resultado de una medición. Por ejemplo, los siguientes conjuntos de datos

Muestra 1: 40, 41, 42, 43, 44, 45, 45, 46, 47, 48, 49, 50

Muestra 2: 20, 25, 30, 35, 40, 45, 45, 50, 55, 60, 65, 70

Tienen el mismo valor para el promedio, la mediana y la moda. Sin embargo los datos en la muestra 2 están más dispersos que en la muestra 1.

La dispersión de un conjunto de mediciones se puede medir de diferentes maneras. Los indicadores más utilizados para representar la dispersión de un conjunto de datos son la desviación media y la desviación estándar.

2.2.2.1 La desviación media de una muestra está dada por

$$\bar{\delta} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{N}$$

2.2.2.2 La desviación estándar de la muestra está dada por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

Cuando se obtiene una medición de una muestra de datos, el valor central de la medición se representa con el promedio de los datos y el error o incertidumbre se representa con la desviación media cuando se trata de laboratorios introductorios, y con la desviación estándar para un tratamiento de datos más riguroso.

3.0 Regla para expresar una medida

Toda medida ya sea reproducible o no, debe de ir seguida por la unidad de la variable que se mide y se expresa de la forma

$$\bar{x} \pm \Delta x \text{ [unidades]}$$

donde \bar{x} representa el valor central de la medición y Δx representa su incertidumbre. De manera que se entienda que la medición está comprendida dentro del intervalo

$$[\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x]$$

La interpretación de esto es que el mejor valor de la medida es \bar{x} y quien hizo las mediciones está razonablemente confiado de que sus mediciones caerán dentro del intervalo anterior.

Recordando el ejemplo de la sección 2.1, el volumen del recipiente está comprendido en el intervalo [47.5 ml, 48.5 ml] y se debe de reportar como

$$\text{volumen} = 48.0 \pm 0.5 \text{ ml.}$$

3.1 Representación absoluta y relativa de la incertidumbre.

Tomando en cuenta que Δx representa la incertidumbre absoluta y x representa el valor central de la medición, entonces

$$\Delta x/x$$

representa la incertidumbre relativa al valor central y

$$(\Delta x/x)100\%$$

representa la incertidumbre relativa porcentual.

Cuando el intervalo se expresa en forma absoluta, la longitud de una varilla, por ejemplo, se expresaría como

$$\text{longitud} = 216.0 \pm 0.5 \text{ mm}$$

y cuando el intervalo se expresa en forma porcentual, la longitud de la varilla se expresaría como

$$\text{longitud} = 216.0 \text{ mm} \pm 0.2 \% = l \pm (\Delta l/l)100\%.$$

En todas las mediciones, la incertidumbre siempre debe ser menor que el valor medido. La incertidumbre porcentual refleja la calidad de la medición. Considérese, por ejemplo, que en la medición de un kilómetro se reporta un intervalo de un centímetro. Esto representa una medición muy precisa y poco usual ya que $\Delta x/x = 1/100,000$. En cambio, supóngase que en la medición de una distancia de tres centímetros se reporta con el mismo intervalo de un centímetro. Esta representaría una medición muy mala ya que $\Delta x/x = 1/3$. Por eso, la calidad de una medición se indica no solo por el tamaño de su intervalo sino también por el cociente de $\Delta x/x$.

En el caso de la medición de una distancia de un kilómetro con un intervalo de un centímetro se obtiene una incertidumbre porcentual de .001%. En cambio en la medición de tres centímetros se obtiene una incertidumbre porcentual de 33.3%.

3.2 Mediciones directas e indirectas

A las cantidades que se obtienen utilizando un instrumento de medida se les denomina mediciones directas, y a las mediciones que se calculan a partir de mediciones directas se les denomina mediciones indirectas.

Por ejemplo el volumen que ocupa un líquido es una medición directa si se mide con una probeta graduada, y se considera como una medición indirecta si se obtiene de la medición de las dimensiones del recipiente que lo contiene.

3.2.1 Propagación de la incertidumbre

Las mediciones directas, que pueden ser reproducibles y no reproducibles, tienen asociada una incertidumbre como se explicó en las secciones 2.1 y 2.2.

Las mediciones indirectas tienen asociada una incertidumbre que se origina de la propagación de la incertidumbre de las mediciones directas de las que fueron derivadas.

3.2.1.1 Propagación de la incertidumbre en la suma y diferencia

Si las magnitudes q y r se miden con incertidumbre Δq y Δr respectivamente y si se utilizan para calcular la diferencia $w = q - r$ entonces la incertidumbre asociada a la variable w es la suma de las incertidumbres asociadas a q y a r , es decir

$$\Delta w = \Delta q + \Delta r$$

Lo mismo es cierto cuando se calcula la suma $w = q + r$.

Este resultado nos indica que cuando se combinan dos variables mediante una suma o una resta, las incertidumbres siempre se suman.

Ejemplo, $(62 \pm 0.01) + (1.7 \pm 0.1) = 63.73 \pm 0.11$.

3.2.1.2 Propagación de errores en el producto y en el cociente

Si las cantidades q y r se han medido con una incertidumbre Δq y Δr respectivamente y si los valores de q y r se utilizan para calcular el producto

$w = qr$ ó el cociente $w = \frac{q}{r}$, entonces la incertidumbre asociada a w , esta dada por

$$\Delta w = |w| \left(\frac{\Delta q}{|q|} + \frac{\Delta r}{|r|} \right)$$

Ejemplo, considérese la multiplicación

$$(1.317 \pm 0.001)(2.7 \pm 0.1) = 3.5559 \pm 3.5559 \left(\frac{0.001}{1.317} + \frac{0.1}{2.7} \right) = 3.5559 \pm 0.1344$$

Considérese ahora el cociente

$$\frac{46.5 \pm 0.1}{1.3 \pm 0.1} = 35.76923077 \pm 35.76923077 \left(\frac{0.1}{46.5} + \frac{0.1}{1.3} \right) = 35.76923077 \pm 2.828402367$$

En estos últimos resultados pueden verse cifras que no dan una información útil y es necesario un criterio para eliminarlas.

Regla para reportar mediciones: en un laboratorio introductorio, la incertidumbre se redondea a una cifra significativa, y ésta debe de tener el mismo orden de magnitud que la cifra menos significativa del valor central.

De acuerdo con esto, los resultados de los ejemplos anteriores se deben de reportar como:

La suma,

$$(03 \pm 0.01) + (1.7 \pm 0.1) = 63.7 \pm 0.1.$$

El producto,

$$(1.317 \pm 0.001)(2.7 \pm 0.1) = 3.6 \pm 0.1$$

La división,

$$\frac{46.5 \pm 0.1}{1.3 \pm 0.1} = 36 \pm 3$$

4 Cifras significativas

Una manera alternativa para reportar las mediciones es mediante el uso de las cifras significativas, que son aquellas que se conocen de manera razonablemente confiable; de este modo la incertidumbre está implícita en el último dígito y es igual a la mitad de una unidad del orden del dígito menos significativo.

Considérese, por ejemplo, que la longitud de un objeto se registró como 15.7 cm. Esto significa que la longitud se midió con una resolución de 0.1 cm (1 mm) y que su valor real cae entre 15.65 cm y 15.75 cm.

Si la medida se hiciera con resolución de 0.01 cm (0.1 mm), se tendría que haber registrado como 15.70 cm.

El valor 15.7 cm. representa una medición con tres cifras significativas (1, 5 y 7) mientras que el valor 15.70 cm. representa una medición con cuatro cifras significativas (1, 5, 7 y 0).

Considérese ahora el caso en que la masa de un objeto se reporta como 2.04763 kg y ha sido medida con una balanza de 0.1 gr de sensibilidad. Esta medición tiene cinco cifras significativas (2, 0, 4, 7 y 6). El tres, que corresponde a .01 gr, no puede leerse en esta balanza y por consiguiente no tiene sentido considerarse para expresar la medición .

4.1 Redondeo de cifras significativas

Para eliminar las cifras no significativas se lleva a cabo un proceso de redondeo de acuerdo a la siguiente regla:

- Si la última cifra es menor que cinco, se suprime
- Si la última cifra es mayor o igual que cinco, se suprime la última y la anterior se incrementa en uno.

Ejemplos: 7.83 se redondea a 7.8; 3.14159 se redondea a 3.1416 y 0.35 se redondea a 0.4.

4.2 Cifras significativas e incertidumbre fraccional.

La incertidumbre fraccional está directamente relacionada con las cifras significativas. Considérese, por ejemplo, los números 10 y 9900 con dos cifras significativas. El 10 con dos cifras significativas significa

$$10 \pm 0.5 = 10 \pm 5\%$$

El número 9900 con dos cifras significativas significa

$$9900 \pm 50 = 9900 \pm 0.5 \%$$

Lo anterior muestra que, cuando se tiene dos cifras significativas, la incertidumbre fraccional ésta comprendida entre el 5% y el 0.5%.

La tabla muestra la relación entre el número de cifras significativas y la incertidumbre fraccional correspondiente.

Correspondencia entre cifras significativas e incertidumbre fraccional	
Número de cifras Significativas	Incertidumbre fraccional correspondiente
1	5% - 50%
2	0.5% - 5%
3	0.05% - 0.5%
4	0.005% - 0.05%

Bibliografía

[1] D. C. **Baird**. *Experimentation: An Introduction to Measurement Theory and Experiment Design*. Prentice Hall, 1962.

[2] J. R. **Taylor**. *An Introduction to Error Analysis*. University Science Books, 1982.

[3] **Apuntes de Laboratorio de Física General**, editado por la Facultad de Ciencias de la UNAM, 1976.

[4] Federick J. Buche, **FISICA GENERAL**, Mc Graw Hill, 1999.